Correction de l'examen du 25/04/2012

Ex.1) Soit f une fonction de x,y. Alors

$$[L,M]f = (LM-ML)f = (a\partial_x + b\partial_y)(c\partial_x f + d\partial_y f) -$$
$$- (c\partial_x + d\partial_y)(a\partial_x f + b\partial_y f) =$$

$$= \cancel{ac\,\partial_{xx} f} + a(\partial_x c)(\partial_x f) + \cancel{ad\,\partial_{xy} f} + a(\partial_x d)(\partial_y f)$$
$$+ \cancel{bc\,\partial_{xy} f} + b(\partial_y c)(\partial_x f) + \cancel{bd\,\partial_{yy} f} + b(\partial_y d)(\partial_y f)$$
$$- \cancel{ac\,\partial_{xx} f} - c(\partial_x a)(\partial_x f) - \cancel{bc\,\partial_{xy} f} - c(\partial_x b)(\partial_y f)$$
$$- \cancel{ad\,\partial_{xy} f} - d(\partial_y a)(\partial_x f) - \cancel{bd\,\partial_{yy} f} - d(\partial_y b)(\partial_y f) =$$

$$= (a\partial_x c - c\partial_x a)\partial_x f + (b\partial_y c - d\partial_y a)\partial_x f +$$
$$+ (a\partial_x d - c\partial_x b)\partial_y f + (b\partial_y d - d\partial_y b)\partial_y f$$

Donc $[L,M] = (a\partial_x c - c\partial_x a + b\partial_y c - d\partial_y a)\dfrac{\partial}{\partial x} +$
$$+ (b\partial_y d - d\partial_y b + a\partial_x d - c\partial_x b)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Ex.2) $f(\theta,\varphi) = \cos^2\theta \cos^2\varphi = \dfrac{\cos^2\theta}{4}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^2 =$
$$= \frac{\cos^2\theta}{4}(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi} + 2)$$

Comme $e^{im\varphi}$ est une fonction propre de L_z et les fonctions correspondant aux valeurs propres différentes sont orthogonales, dans la somme

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l,m} \alpha_{l,m} Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

les seules valeurs de m qui peuvent apparaître sont $m = 2,-2,0$ (le produit scalaire de $f(\theta,\varphi)$ avec $Y_l^m(\theta,\varphi)$ est égal à 0 pour tout $m \neq \pm 2, 0$).

De plus, on sait que

$$\frac{\cos^2\theta}{4}\cdot 2 = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{l,0} Y_l^0(\theta,\varphi)$$

Puis, comme $Y_l^0 = \sqrt{\dfrac{2l+1}{4\pi}}\, P_l^0(\cos\theta) = \sqrt{\dfrac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta)$

polynôme de Legendre

nous avons

$$\frac{\cos^2\theta}{2} = \sum_{l=0}^{2} P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\Big(P_0(\cos\theta)\alpha_{0,0} + P_1(\cos\theta)\alpha_{1,0}\sqrt{3} + P_2(\cos\theta)\alpha_{2,0}\sqrt{5}\Big)$$

et $\alpha_{l,0} = 0$ pour $l \neq 0,1,2$.

En plus : $P_0(z)=1$, $P_1(z)=z$, $P_2(z)=\frac{3z^2-1}{2}$, donc

$$\frac{z^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(\alpha_{0,0}\cdot 1 + \alpha_{1,0}\cdot z\sqrt{3} + \alpha_{2,0}\frac{3z^2-1}{2}\sqrt{5}\right)$$

On en conclut que

$$\boxed{\alpha_{1,0}=0}, \quad \frac{3}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\alpha_{2,0} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(\alpha_{0,0}-\frac{\sqrt{5}}{2}\alpha_{2,0}\right)=0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{\alpha_{2,0}=\frac{\sqrt{4\pi}}{3\sqrt{5}}} \qquad \boxed{\alpha_{0,0}=\frac{\sqrt{4\pi}}{6}}$$

Ex. 3) Notre équation est

$$-\psi''-\frac{2}{r}\psi'+\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{\alpha}{r}\right)\psi = k^2\psi$$

1). $r\to 0$: posons

$$\psi = r^\vartheta(1+o(1))$$

$$\psi' = \vartheta r^{\vartheta-1}(1+o(1))$$

$$\psi'' = \vartheta(\vartheta-1)r^{\vartheta-2}(1+O(1))$$

alors

$$-\vartheta(\vartheta-1)r^{\vartheta-2}(1+o(1)) - 2\vartheta\, r^{\vartheta-2}(1+o(1)) + (\ell(\ell+1)+\alpha r - k^2r^2)\times r^{\vartheta-2}(1+o(1))=0$$

d'où l'équation

$$-\vartheta(\vartheta-1)-2\vartheta+\ell(\ell+1)=0 \Rightarrow \vartheta(\vartheta+1)=\ell(\ell+1)$$

$$\vartheta_1=\ell,\quad \vartheta_2=-\ell-1$$

Donc il existe une solution

$$\psi_1(r) = r^\ell(1+o(1))$$

et

$$\psi_2(r) = r^{-\ell-1}(1+o(1))$$

2). $r\to\infty$: la méthode précédente mène à une contradiction donc on considère le développement plus général :

$$\psi(r) = e^{g(r)}$$

$$g(r) = P(r)+\gamma\ln r+\frac{\beta}{r}+O(r^{-2})$$

Calculons d'abord le terme dominant : $P(r)\sim A r^d$.
L'équation pour g étant

$$-g''-(g')^2-\frac{2}{r}g'+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{\alpha}{r}-k^2=0,$$

on obtient

$$-A\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+o(r^{\alpha-2})-\left(A\alpha r^{\alpha-1}+o(r^{\alpha-1})\right)^2$$

$$-2A\alpha r^{\alpha-2}+o(r^{\alpha-2})+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{\alpha}{r}-k^2=0$$

Cela donne à son tour deux équations

$$\begin{cases} 2(\alpha-1)=0 \\ -A^2\alpha^2-k^2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha=1 \\ A=\pm ik \end{matrix}$$

Donc le développement est

$$g(r\to\infty)=\pm ikr+\gamma\ln r+\frac{\beta}{r}+O(r^{-2})$$

avec γ et β à déterminer. On re-substitue ce développement dans l'équation pour g:

$$\begin{cases} g'(r\to\infty)=\pm ik+\frac{\gamma}{r}-\frac{\beta}{r^2}+O(r^{-3}) \\ g''(r\to\infty)=-\frac{\gamma}{r^2}+\frac{2\beta}{r^3}+O(r^{-4}) \end{cases}$$

$$\frac{\gamma}{r^2}-\frac{2\beta}{r^3}+O(r^{-4})-\left(\pm ik+\frac{\gamma}{r}-\frac{\beta}{r^2}+O(r^{-3})\right)^2$$

$$-\frac{2}{r}\left(\pm ik+\frac{\gamma}{r}-\frac{\beta}{r^2}+O(r^{-3})\right)+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{\alpha}{r}-k^2=0$$

Ensuite on ne garde que les termes d'ordre 1, $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$:

1 : $-(-k^2)-k^2=0$ (vérification du calcul précédent)

r^{-1} : $-2(\pm ik)\gamma-2(\pm ik)+\alpha=0 \Rightarrow \gamma=-1\mp\frac{i\alpha}{2k}$

r^{-2} : $\gamma+2\beta(\pm ik)-\gamma^2-2\gamma+\ell(\ell+1)=0$

$$2\beta(\pm ik)=\gamma(\gamma+1)-\ell(\ell+1)=(\gamma-\ell)(\gamma+\ell+1)=$$

$$=\left(-1\mp\frac{i\alpha}{2k}-\ell\right)\left(\mp\frac{i\alpha}{2k}+\ell\right)$$

Donc 2 types de comportement:

$$\psi_\pm(r\to\infty)=r^{-1\mp\frac{i\alpha}{2k}}e^{\pm ikr}\left(1+\frac{\left(-1\mp\frac{i\alpha}{2k}-\ell\right)\left(\mp\frac{i\alpha}{2k}+\ell\right)}{r}+O(r^{-2})\right)$$

Ex. 41 1). Commutation de $\{L_n\}$ et $\{a_n\}$: e.g. pour $n\neq 0$

$$[L_n, a_{-m}] = \frac{1}{2}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k}a_k, a_{-m}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} [a_{n-k}a_k, a_{-m}] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big\{a_{n-k}[a_k, a_{-m}] + [a_{n-k}, a_{-m}]a_k\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big\{a_{n-k}\, k\,\delta_{k-m,0} + (n-k)\,\delta_{n-k-m}\, a_k\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{m\, a_{n-m} + m\, a_{n-m}\} = m\, a_{n-m}$$

De même

$$[L_0, a_{-m}] = \Big[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n>0} a_{-n}a_n, a_{-m}\Big] = [a_{-m}a_m, a_{-m}] =$$

$$= a_{-m}[a_m, a_{-m}] = m\, a_{-m}.$$

Ces relations de commutation sont donc vérifiées.

2). Pour calculer $[L_n, L_m]$, on écrit L_m comme

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{k>0} a_{m-k}\, a_k + \frac{1}{2}\sum_{k\leq 0} a_k\, a_{m-k}$$

et on utilise la relation obtenue ci-dessus:

$$[L_n, L_m] = \frac{1}{2}\sum_{k>0}[L_n, a_{m-k}a_k] + \frac{1}{2}\sum_{k\leq 0}[L_n, a_k a_{m-k}] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k>0}\Big\{[L_n, a_{m-k}]a_k + a_{m-k}[L_n, a_k]\Big\}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\leq 0}\Big\{[L_n, a_k]a_{m-k} + a_k[L_n, a_{m-k}]\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k>0}\Big\{(k-m)\, a_{n+m-k}\, a_k + (-k)\, a_{m-k}\, a_{n+k}\Big\}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\leq 0}\Big\{(-k)\, a_{n+k}\, a_{m-k} + (k-m)\, a_k\, a_{n+m-k}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k>0}(k-m)a_{n+m-k}a_k + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{m+n-k}\, a_k\, (n-k)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{n}(n-k)\, a_k\, a_{m+n-k} + \frac{1}{2}\sum_{k\leq 0}(k-m)\, a_k\, a_{m+n-k} \quad (5)$$

Supposons par exemple que $n\geq 0$. Alors :

$$(5)\ \frac{1}{2}\sum_{k>0}\Big\{(k-m)a_{n+m-k}a_k + (n-k)a_{m+n-k}a_k\Big\} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n-k)a_{m+n-k}a_k$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\leq 0}\Big\{(n-k)\, a_k\, a_{m+n-k} + (k-m)\, a_k a_{m+n-k}\Big\} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n-k)a_k a_{m+n-k}$$

$$= (n-m)\cdot\left\{\frac{1}{2}\sum_{k>0} a_{m+n-k}\,a_k + \frac{1}{2}\sum_{k\leq 0} a_k\, a_{m+n-k}\right\} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n-k)\,[a_k, a_{m+n-k}]$$

$$= (n-m)\,L_{m+n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n-k)\,k\,\delta_{m+n,0} =$$

$$= (n-m)\,L_{m+n} + \delta_{m+n,0}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(n-k)$$

On peut montrer (par exemple, par induction), que

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{n(n^2-1)}{6},$$

ce qui donne la charge centrale $c = 1$.